

No.4 対角化の応用

この回のゴール

- 対角化を使って行列の n 乗 A^n を求められる.
- 漸化式 (フィボナッチ数列など) の一般項を, 行列の対角化で求められる.
- 推移行列の n 乗の極限を求め, その意味を説明できる.
- 連立の線形微分方程式を, 対角化によって独立な式に分けて解ける.

■ 1. 行列の n 乗

定理 1

$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ならば, 自然数 k について

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

【証明】 $A = PDP^{-1}$ なので $A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$ (間の $P^{-1}P = E$ が消える). 対角行列の k 乗は対角成分の k 乗である. $\square$

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

【解答】 No.3 練習問題 1 (1) より $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

($n = 1$ を代入すると A に戻る.)

注意

A^n を直接計算すると, n が大きいほど手間がかかる. 対角化すれば, 「固有値の n 乗」を計算するだけで済む. また, A^n の成分が 3^n と $(-1)^n$ の組合せで書けることから, n が大きいとき A^n はほぼ 3^n に比例して大きくなることも分かる. いちばん絶対値の大きい固有値が, 長い目で見たときのふるまいを決める.

■ 2. 漸化式への応用：フィボナッチ数列

例題 2

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定まるフィボナッチ数列の一般項を求めよ.

【解答】 $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_{n-1}$$

なので, $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 = {}^t(1, 0)$.

$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ の根を $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする. $A - \alpha E = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ の第2行から, 固有ベクトルは ${}^t(\alpha, 1)$. 同様に β の固有ベクトルは ${}^t(\beta, 1)$.

$\mathbf{x}_0$ を固有ベクトルで表すと, ${}^t(\alpha, 1) - {}^t(\beta, 1) = {}^t(\alpha - \beta, 0) = \sqrt{5} \mathbf{x}_0$ より

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

固有ベクトルに A^n を掛けると固有値の n 乗倍になるので

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \alpha^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \beta^n \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

第2成分を見て

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

固有ベクトルで分解する

例題2では P^{-1} を計算せず, 初期ベクトルを固有ベクトルの1次結合で表してから A^n を掛けた. $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{p}_1 + c_2 \mathbf{p}_2$ なら $A^n \mathbf{x}_0 = c_1 \lambda_1^n \mathbf{p}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{p}_2$. これは $A^n P = P D^n$ を列ごとに見たものと同じで, 計算が楽になることが多い.

コラム：黄金比

$|\beta| < 1$ なので, n が大きいと $\beta^n \rightarrow 0$ となり, F_n は $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ にほぼ等しい. したがって $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$ (黄金比). これも「絶対値がいちばん大きい固有値が長期的なふるまいを決める」例である.

■ 3. 推移行列：人口移動のモデル

例題 3

2つの町 X, Y の間で、毎年 X の人口の 10% が Y へ、Y の人口の 20% が X へ移り、それ以外の出入りはないとする。はじめの人口を X が a 人、Y が b 人とするとき、 n 年後の人口と、長い年月の後の人口の比を求めよ。

【解答】 n 年後の人口を x_n, y_n とすると

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7)$. 固有値 1 の固有ベクトルは ${}^t(2, 1)$, 固有値 0.7 の固有ベクトルは ${}^t(1, -1)$.

初期ベクトルを分解すると ${}^t(a, b) = \frac{a+b}{3}{}^t(2, 1) + \frac{a-2b}{3}{}^t(1, -1)$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{a+b}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-2b}{3} (0.7)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$n \rightarrow \infty$ で $(0.7)^n \rightarrow 0$ なので、人口は $\frac{2(a+b)}{3}$ 人と $\frac{a+b}{3}$ 人に近づく。はじめの人口によらず、 $\mathbf{X} : \mathbf{Y} = 2 : 1$ に落ち着く。

注意

- A の各列の和は 1 である（人の総数が変わらない）。このような行列はいつも固有値 1 をもつ（練習問題 6）。
- 固有値 1 の固有ベクトルが「釣り合いの状態」（定常状態）を表し、他の固有値（絶対値が 1 より小さい）の成分は時間とともに消えていく。
- このモデルは、確率の言葉で言うとマルコフ連鎖である（分野「確率・統計」第 8 章 No.1）。

■ 4. 連立の線形微分方程式

$x(t), y(t)$ を時刻 t の関数とし、 $x' = \frac{dx}{dt}$ と書く。1つの式 $x' = ax$ の解は $x = Ce^{at}$ (C は定数) である（分野「微分方程式」第 2 章 No.1）。これを使って、連立の方程式を解く。

例題 4

連立微分方程式 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ の一般解を求めよ。

【解答】 $\mathbf{x} = {}^t(x, y)$ とおくと $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 例題 1 の P を使って $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} = {}^t(u, v)$) とおくと、 $P\mathbf{u}' = AP\mathbf{u}$ より

$$\mathbf{u}' = P^{-1}AP\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \text{つまり} \quad u' = 3u, \quad v' = -v.$$

2 つの式が**分かれた**ので、それぞれ解けて $u = C_1 e^{3t}$, $v = C_2 e^{-t}$. よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

コラム：対角化は「変数の分離」

元の方方程式では x' に y が, y' に x が入り込んでいて, 1 つずつは解けなかった. 固有ベクトルを基底に選べ直すと, 各成分が他と関係なく変化するようになる. n 乗の計算も, 漸化式も, 微分方程式も, **固有ベクトルの方向に分解すれば, それぞれ 1 次元の問題になる**という同じ考え方で解いている. 解の様子 (原点に近づくか遠ざかるか) を固有値の符号で調べることは, 分野「微分方程式」第 7 章 No.2 (安定性) で扱う.

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, A^n を求めよ. (No.3 練習問題 1 (2) を使ってよい.)
2. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ で定まる数列の一般項を, 行列を用いて求めよ.
3. 町 X, Y の間で, 毎年 X の人口の 30% が Y へ, Y の人口の 20% が X へ移る. 長い年月の後, X と Y の人口の比はどうなるか.
4. 連立微分方程式 $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ の一般解を求めよ.
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^n を求めたい.
 - (1) λ^n を $\lambda^2 - 7\lambda + 10$ で割った余りを $p\lambda + q$ とする. p, q を求めよ.
 - (2) $A^n = pA + qE$ であることを説明し, A^n を求めよ.
6. (考えてみよう) 2 次正方行列 A の各列の成分の和がどちらも 1 であるとき, A は固有値 1 をもつことを示せ. (ヒント: ${}^tA$ に ${}^t(1, 1)$ を掛けてみる. No.2 練習問題 2 も使う.)

■ 練習問題の解答

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$
2. $\mathbf{x}_n = {}^t(a_{n+1}, a_n)$ とおくと $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = {}^t(1, 0)$. $\varphi_A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, 固有ベクトルは ${}^t(2, 1)$ (固有値 2), ${}^t(3, 1)$ (固有値 3). $\mathbf{x}_0 = {}^t(3, 1) - {}^t(2, 1)$ なので $\mathbf{x}_n = 3^n {}^t(3, 1) - 2^n {}^t(2, 1)$. 第 2 成分より $a_n = 3^n - 2^n$. ($a_2 = 5$, $a_3 = 19$ と確かめられる.)

3. $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$, $\varphi_A = (\lambda - 1)(\lambda - 0.5)$. 固有値 1 の固有ベクトルは $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, つまり $-0.3x + 0.2y = 0$ より ${}^t(2, 3)$. 固有値 0.5 の成分は $(0.5)^n \rightarrow 0$ で消えるので, $X : Y = 2 : 3$ に近づく.

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ は $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ で $\text{diag}(5, 2)$ に対角化される (No.3 例題 1). $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. (1) $\lambda^n = (\lambda - 5)(\lambda - 2)Q(\lambda) + p\lambda + q$ に $\lambda = 5, 2$ を代入して $5^n = 5p + q$, $2^n = 2p + q$. よって $p = \frac{5^n - 2^n}{3}$, $q = \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}$. (2) $\lambda = A$ を代入すると, ケイリー・ハミルトンの定理より $(A - 5E)(A - 2E) = A^2 - 7A + 10E = O$ なので $A^n = pA + qE$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 4p + q & p \\ 2p & 3p + q \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

(第 5 章 No.5 練習問題 6 と一致する.)

6. 各列の和が 1 なので, ${}^t A {}^t(1, 1) = {}^t(1, 1)$. つまり 1 は ${}^t A$ の固有値. No.2 練習問題 2 より A と ${}^t A$ の固有多項式は等しいので, 1 は A の固有値でもある.